4

Développement décimal d'un réel

On rappelle que le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien, ce qui permet d'y définir la fonction partie entière.

En utilisant cette partie entière on verra dans ce chapitre que tout réel peut être approché par des nombres rationnels particuliers que sont les nombres décimaux.

4.1 Nombres décimaux

Définition 4.1 *On appelle nombre décimal tout nombre rationnel de la forme* $\frac{a}{10^m}$ *où* a *est un entier relatif et* m *un entier naturel.*

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Il est facile de vérifier que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Cet anneau est donc commutatif et intègre (i. e. sans diviseurs de 0).

Exercice 4.1 *Montrer qu'un nombre rationnel non nul* $r = \frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}^*$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *premiers entre eux est décimal si, et seulement si, les seuls diviseurs de* q *sont* 2 *et* 5.

Solution 4.1 *Si* $q = 2^n 5^m$, *on a alors* $r = \frac{2^m 5^n p}{10^{n+m}} \in \mathbb{D}$.
Réciproquement si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{D}$, *on a alors* $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^m}$ *où* $a \in \mathbb{Z}^*$ *et* $10^m p = aq$ *avec* p *et* q *premiers entre eux entraîne* q *divise* $10^m = 2^m 5^m$ *(théorème de Gauss) et les seuls facteurs premiers de* q *sont* 2 *et* 5 *(unicité de la décomposition en facteurs premiers).*

Exercice 4.2 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *le rationnel* $r = \frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$ *n'est jamais décimal.*

Solution 4.2 *Il suffit de remarquer que* 3 *divise* $n(n^2-1)$ *(si* $n \equiv 0 \mod 3$ *c'est clair et si* $n \equiv 1$ *ou* $n \equiv 2 \mod 3$ *alors* $n^2 - 1 \equiv 0 \mod 3$*) et* 3 *ne divise pas* n^2+1 *(si* $n \equiv 0 \mod 3$ *alors* $n^2+1 \equiv 1 \mod 3$ *et si* $n \equiv 1$ *ou* $n \equiv 2 \mod 3$ *alors* $n^2+1 \equiv 2 \mod 3$*), donc* r *s'écrit sous forme irréductible* $r = \frac{p}{q}$ *avec* 3 *qui divise* q *et* $r \notin \mathbb{D}$.

Exercice 4.3 *Montrer que l'ensemble des nombres décimaux inversibles est :*

$$\mathbb{D}^* = \left\{ r = \pm 2^\alpha 5^\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Solution 4.3 *Un rationnel* $r = \dfrac{a}{10^m}$ *est inversible dans* $\mathbb{D}$ *si, et seulement si, il existe un entier relatif* b *et un entier naturel* n *tels que* $\dfrac{a}{10^m}\dfrac{b}{10^n} = 1$, *ce qui revient à dire que* $ab = 10^{n+m}$ *ou encore que* 2 *et* 5 *sont les seuls diviseurs premiers possibles de* a *et* b.

Exercice 4.4 *Montrer que l'anneau* $\mathbb{D}$ *des nombres décimaux est principal.*

Solution 4.4 *Il s'agit de montrer que dans l'anneau intègre* $\mathbb{D}$, *tout idéal* I *est principal, c'est-à-dire de la forme* $\alpha\mathbb{D}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{D}$.
Le résultat est trivial si $I = \{0\}$.
Si I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *non réduit à* $\{0\}$, *alors* $I \cap \mathbb{N}^*$ *est non vide. En effet comme* I *est un sous-groupe additif de* $\mathbb{D}$, *il contient un décimal* $d > 0$ *(si* $d \in I \setminus \{0\}$, *alors* $-d \in I \setminus \{0\}$*) et en écrivant* $d = \dfrac{a}{10^p}$ *avec* $a \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $a = 10^p d \in I$ *puisque* I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *et* $10^p \in \mathbb{D}$ *avec* $a \in \mathbb{N}^*$.
En tant que partie non vide de $\mathbb{N}^*$, $I \cap \mathbb{N}^*$ *admet donc un plus petit élément* α.
Du fait que I *est un idéal de* $\mathbb{D}$ *on déduit que* $\alpha\mathbb{D} \subset I$.
D'autre part, tout $d \in I$ *s'écrit* $d = \dfrac{a}{10^p}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $p \in \mathbb{N}$ *et en effectuant la division euclidienne de* $a = 10^p d$ *par* α, *on a* $10^p d = \alpha q + r$ *avec* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $0 \leq r \leq \alpha - 1$ *dans* $\mathbb{N}$, *ce qui donne* $r = 10^p d - \alpha q \in I \cap \mathbb{N}$ *(*$10^p d$ *et* αq *sont dans* $\mathbb{D}$ *puisque* d *et* α *y sont et* I *est un idéal) et nécessairement* $r = 0$ *par définition de* α. *On a* $d = \alpha\dfrac{q}{10^p} \in \alpha\mathbb{D}$ *et* $I \subset \alpha\mathbb{D}$, *soit en définitive* $I \subset \alpha\mathbb{D}$.

De manière un plus générale, on peut montrer que tout sous-anneau A de $\mathbb{Q}$ est principal. En effet, soit I un idéal de A non réduit à $\{0\}$ (le résultat est trivial si $I = \{0\}$). L'intersection $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc principal et il existe un entier a tel que $I \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Tout élément r de I s'écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $qr = p \in I \cap \mathbb{Z}$ (r est dans I et q dans $\mathbb{Z} \subset A$ puisque A est unitaire), il existe donc un entier k tel que $qr = ka$, ce qui donne $r = \dfrac{ka}{q} = \dfrac{k}{q}a$. Par ailleurs le théorème de Bézout nous dit qu'il existe deux entiers u et v tels que $up + vq = 1$, donc $\dfrac{1}{q} = ur + v \in A$ ($\mathbb{Z} \subset A$ et $r \in I \subset A$) et $\dfrac{k}{a} \in A$. On a donc montré que tout élément de I s'écrit $r = sa$ avec $s \in A$ et $a \in I$, ce qui signifie que I est principal. On retrouve ainsi le fait que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est principal.

4.2 Approximations décimales des réels

Pour tout réel x, la partie entière $a_0 = [x] \in \mathbb{Z}$ nous fournit une première approximation de x dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que a_0 est l'entier relatif défini par :

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

En subdivisant l'intervalle $[a_0, a_0 + 1]$ en 10 intervalles de même longueur, ce qui revient à écrire que :

$$[a_0, a_0 + 1] = \bigcup_{k=0}^{9} \left[a_0 + \frac{k}{10}, a_0 + \frac{k+1}{10}\right]$$

il existe un unique indice a_1 compris entre 0 et 9 tel que :

$$r_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10} = r_1 + \frac{1}{10}$$

et r_1 est une approximation décimale de x plus fine que $r_0 = a_0$.

En remarquant que $10r_1$ est entier et vérifie :

$$10r_1 \leq 10x < 10r_1 + 1,$$

on déduit que $r_1 = \frac{[10x]}{10}$.

En subdivisant de manière analogue l'intervalle $\left[r_1, r_1 + \frac{1}{10}\right]$ en 10 intervalles de même longueur, ce qui revient à écrire que :

$$\left[r_1, r_1 + \frac{1}{10}\right] = \bigcup_{k=0}^{9} \left[r_1 + \frac{k}{100}, r_1 + \frac{k+1}{100}\right]$$

il existe un unique indice a_2 compris entre 0 et 9 tel que :

$$r_2 = r_1 + \frac{a_2}{100} \leq x < r_1 + \frac{a_2 + 1}{100} = r_2 + \frac{1}{100}$$

et r_2 est une approximation décimale de x plus fine que r_1.

En remarquant que $100r_2 \in \mathbb{Z}$ et $100r_2 \leq 100x < 100r_2 + 1$, on déduit que $r_2 = \frac{[100x]}{100}$.

En continuant ainsi de suite, on définit les nombres décimaux r_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$$

et ces nombres vont nous fournir des approximations décimales de x.

En effet, par définition de la partie entière $10^n r_n = [10^n x]$, on a :

$$10^n r_n \leq 10^n x < 10^n r_n + 1, \tag{4.1}$$

ce qui peut aussi s'écrire $r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$, ou encore :

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}, \tag{4.2}$$

ce qui entraîne que $\lim_{n \in \mathbb{N}} (r_n) = x$.

L'encadrement (4.1) va nous fournir d'autres informations sur la convergence de cette suite.

De $10^{n+1} r_{n+1} > 10^{n+1} x - 1$ et $-10^n r_n \geq -10^n x$, on déduit que :

$$10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) > -1$$

dans $\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) \geq 0$. On a $r_{n+1} - r_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui signifie que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

De manière analogue les inégalités $10^{n+1} r_{n+1} \leq 10^{n+1} x$ et $-10^n r_n < -10^n x + 1$ nous donne :

$$10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) < 10$$

dans $\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) \leq 9$.

En définitive, pour tout entier n :

$$a_{n+1} = 10^{n+1} (r_{n+1} - r_n) = \left[10^{n+1} x\right] - 10 \left[10^n x\right]$$

est un entier compris entre 0 et 9 et :

$$r_{n+1} = r_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \tag{4.3}$$

ce qui n'est pas étonnant.

En tenant compte de $r_0 = a_0 = [x]$, on déduit facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \tag{4.4}$$

où les a_k sont des entiers compris entre 0 et 9.

Théorème 4.1 *Les suites* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(r_n + \frac{1}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des suites adjacentes de nombres décimaux qui convergent vers* x *avec* $r_n \leq x < s_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On vient de vérifier que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers x.

Avec :

$$s_{n+1} - s_n = r_{n+1} - r_n - \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{a_{n+1} - 9}{10^{n+1}} \leq 0,$$

on déduit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

De $s_n - r_n = \frac{1}{10^n}$, on déduit que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (s_n - r_n) = 0$. Ces deux suites sont donc adjacentes et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers x.

L'encadrement (4.2) $0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}$ s'écrit aussi :

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n} = s_n.$$

■

L'encadrement (4.2) nous montre aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{10^n} < r_n \leq x, \\ x < s_n = r_n + \frac{1}{10^n} \leq x + \frac{1}{10^n} \end{cases}$$

Pour ces raisons r_n est appelée l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x et s_n l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près.

Le théorème précédent peut aussi s'exprimer comme suit.

Théorème 4.2 *L'ensemble* $\mathbb{D}$ *des nombres décimaux est dense dans* $\mathbb{R}$.

La base de numération 10 peut en fait être remplacée par n'importe quelle base $b \geq 2$, c'est-à-dire que l'ensemble :

$$\mathbb{P} = \left\{ \frac{a}{b^m} \mid a \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

En utilisant le fait que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets, on peut même montrer que l'ensemble $\mathbb{D}^*$ des nombres décimaux inversibles est dense dans $\mathbb{R}$.

De l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.1 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnel est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 4.5 *Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Solution 4.5 *Pour tout réel x il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers $x+\sqrt{2}$ et la suite de nombres irrationnels $\left(r_n - \sqrt{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

L'approximation décimale des réels permet de comparer deux réels.

Exercice 4.6 *Soient x, y deux réels et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites d'approximations décimales par défaut associées. Montrer que $x < y$ si, et seulement si, il existe un entier n tel que $r_n < r'_n$.*

Solution 4.6 *Si $x < y$ on peut alors trouver un entier naturel n tel que $10^n (y - x) > 1$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) soit $10^n y > 10^n x + 1$ et alors :*

$$\begin{aligned} 10^n r_n + 1 = [10^n x] + 1 \leq 10^n x + 1 < 10^n y \\ < [10^n y] + 1 = 10^n r'_n + 1 \end{aligned}$$

et $r_n < r'_n$.
Réciproquement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n < r'_n$, alors $[10^n x] < [10^n y]$, ce qui équivaut à $[10^n x] \leq [10^n y] - 1$ et entraîne :

$$10^n x < [10^n x] + 1 \leq [10^n y] \leq 10^n y,$$

soit $x < y$.

En utilisant (4.3) et (4.4), la convergence de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x peut aussi se traduire par le résultat suivant.

Théorème 4.3 *Pour tout réel x on a :*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \tag{4.5}$$

où

$$\begin{cases} a_0 = [x] \\ \forall n \geq 1,\ a_n = 10^n (r_n - r_{n-1}) = [10^n x] - 10 [10^{n-1} x] \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $n \geq 1$, $a_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}$.

On dit alors que cette écriture est un développement décimal illimité du réel x et les a_n pour $n \geq 1$ sont les chiffres de x dans cette écriture.

Par exemple pour $x = 32,456$, on vérifie que :

$$\begin{cases} a_0 = [x] = 32, \\ a_1 = [10x] - 10 [x] = 4 \\ a_2 = [100x] - 10 [10x] = 5 \\ a_4 = [1000x] - 10 [100x] = 6 \\ a_k = 0, \text{ pour } k \geq 5, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $k \geq 1$, a_k est la k-ème décimale de x après la virgule.

Mais pour $x < 0$, ce résultat n'est plus vrai. Par exemple pour $x = -32,456$, on a :

$$\begin{cases} a_0 = [x] = -33, \\ a_1 = [10x] - 10\,[x] = -325 + 330 = 5 \\ a_2 = [100x] - 10\,[10x] = -3246 + 3250 = 4 \\ a_4 = [1000x] - 10\,[100x] = -32456 + 32460 = 4 \\ a_k = 0,\ \text{pour } k \geq 5, \end{cases}$$

ce qui correspond à $x = -33 + 0,544$.

Pour $x > 0$ le développement (4.5) est noté :

$$x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

et pour $x < 0$, on écrit :

$$x = -(-x) = -a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

où $a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ est le développement décimal illimité de $-x$ obtenu par le procédé précédent, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} a_0 = [-x]\,, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = [-10^n x] - 10\,[-10^{n-1} x]\,. \end{cases}$$

Exemple 4.1 *La constante de Ramanujan est le réel* $e^{\pi\sqrt{163}}$ *dont le développement décimal s'écrit :*

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999992...$$

On pourrait croire qu'il est entier si on ne calcule pas la 13*-ème décimale.*

Une question que l'on peut naturellement se poser est celle de l'unicité d'un tel développement. Plus précisément, on a définit une application δ de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ pour tout $k \geq 1$ en associant à tout réel x positif ou nul la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (4.6) et la question est de savoir si cette application est bijective.

Le résultat qui suit nous dit que cette application n'est pas surjective.

Théorème 4.4 *Pour tout réel x la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* (4.6) *ne peut pas être stationnaire sur* 9 *à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $a_n = 9$ pour tout $n \geq n_0$. On a alors pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} r_n - r_{n_0} &= \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{9}{10^{n_0+1}} \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{9}{10^{n_0+1}} \frac{1 - \dfrac{1}{10^{n-n_0}}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^n}, \end{aligned}$$

soit $s_n = r_n + \dfrac{1}{10^n} = r_{n_0} + \dfrac{1}{10^{n_0}} = s_{n_0}$ et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} (s_n) = s_{n_0}$, ce qui contredit $x < s_{n_0}$. ■

On déduit donc que, par exemple, la suite $(0, 9, 9, \cdots, 9, \cdots)$ comportant une infinité de 9 consécutifs n'a pas d'antécédents par l'application δ.

Si $\mathcal{D}'$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ formé des suites qui ne sont pas stationnaires sur 9 à partir d'un certain rang, nous allons vérifier que δ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathcal{D}'$.

Définition 4.2 *On appelle développement décimal illimité propre du réel x toute égalité $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{D}'$. Un tel développement est noté $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ et les a_n, pour $n \geq 1$, sont les chiffres de x dans cette écriture.*

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (4.6), fournit un développement décimal illimité propre de x.

Le réel $x = 1$ a pour développement propre $1 = 1,00 \cdots 0 \cdots$, mais on peut aussi écrire que :

$$1 = 0,99 \cdots 9 \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k},$$

ce deuxième développement est un développement impropre de 1.

Théorème 4.5 *Le développement décimal illimité propre d'un réel positif est unique et l'application δ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathcal{D}'$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a déjà le développement $x = a_0, a_1 \cdots a_n \cdots$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par (4.6). Supposons que l'on ait un autre développement :

$$x = b_0, b_1 \cdots b_n \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

avec $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$. On a $b_0 \in \mathbb{N}$ et du fait que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire sur 9 à partir d'un certain rang, on a :

$$0 \leq x - b_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1,$$

soit $b_0 \leq x < b_0 + 1$, ce qui signifie que $b_0 = [x] = a_0$.

Plus généralement, pour $n \geq 1$ on a :

$$10^n \left(x - b_0 - \cdots - \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} \right) = b_n + \frac{b_{n+1}}{10} + \cdots$$

et le raisonnement précédent nous dit que :

$$b_n = \left[10^n \left(x - b_0 - \cdots - \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} \right) \right] = [10^n x] - 10 \left(b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \right)$$

avec :

$$10^{n-1} x = b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} + \frac{b_n}{10} + \cdots$$

et $b_0 10^{n-1} + \cdots + b_{n-1} = [10^{n-1} x]$. On a donc $b_n = [10^n x] - 10 [10^{n-1} x] = a_n$.

Le développement décimal illimité propre d'un réel positif x est donc bien unique.

Le théorème précédent nous dit que δ est bien une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{D}'$.

L'injectivité se déduit immédiatement de l'unicité précédemment démontrée.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$, on peut poser $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ (avec $a_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} < 1$, on déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right)_{n\geq 1}$ est croissante majorée, donc convergente) et l'unicité du développement propre nous dit que $\delta(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'application δ est donc surjective. ■

Ce résultat permet de donner une démonstration relativement simple du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 4.6 $\mathbb{R}$ *est non dénombrable.*

Démonstration. Si $\mathbb{R}$ est dénombrable il en est alors de même de l'ensemble :

$$A = \{x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \mid \forall k \geq 1,\ 0 \leq a_k \leq 8\}.$$

On peut donc écrire que :

$$A = \{x_p = 0, a_{p,1} a_{p,2} \cdots a_{p,n} \cdots \mid p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq 1,\ 0 \leq a_{p,k} \leq 8\}.$$

Le réel $b = 0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ définit par $0 \leq b_i \leq 8$ et $b_i \neq a_{ii}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ est dans A et distinct de tous les x_p ($b = x_p$ entraîne $b_p = x_{p,p}$) ce qui est contradictoire. En définitive $\mathbb{R}$ est non dénombrable. ■

Exercice 4.7 *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le premier chiffre après la virgule du développement décimal illimité propre de $\sqrt{n^2+n}$ est égal à 4.*

Solution 4.7 *Ce premier chiffre est $a_1 = \left[10\sqrt{n^2+n}\right] - 10\left[\sqrt{n^2+n}\right]$. Avec $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, on déduit que $\left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$ et avec $10n+4 < 10\sqrt{n^2+n} < 10n+5$ que $\left[10\sqrt{n^2+n}\right] = 10n+4$. Le résultat en découle alors.*

Exercice 4.8 *Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, le premier chiffre après la virgule du développement décimal illimité propre de $\sqrt{n^2+2n}$ est égal à 9.*

Solution 4.8 *Ce premier chiffre est $a_1 = \left[10\sqrt{n^2+2n}\right] - 10\left[\sqrt{n^2+2n}\right]$. Avec $n < \sqrt{n^2+2n} < n+1$ pour $n \geq 1$, on déduit que $\left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$ et avec $10n+9 < 10\sqrt{n^2+n} < 10(n+1)$ pour $n \geq 5$, que $\left[10\sqrt{n^2+n}\right] = 10n+9$. Le résultat en découle alors.*
Pour $n = 1$, on a $a_1 = 1$ et pour $n = 2, 3, 4$, on a $a_1 = 8$.

4.3 Une caractérisation des nombres rationnels

Les développement décimaux illimités propres permettent de caractériser les nombres décimaux et les nombres rationnels.

Comme x est décimal [resp. rationnel] si, et seulement si, $-x$ l'est, il nous suffit de considérer les réels positifs, et même strictement positifs.

Théorème 4.7 *Un réel x strictement positif est décimal si, et seulement si, son développement décimal illimité propre est fini, ce qui signifie que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ des décimales de x après la virgule est nulle à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Si $x = \dfrac{a}{10^m}$ est décimal, par division euclidienne on peut écrire $a = q10^m + r$ avec $0 \leq r < 10^m$ et en utilisant l'écriture en base 10 de r, à savoir $r = \sum\limits_{k=0}^{n} r_k 10^k$ avec $n < m$ et $0 \leq r_k \leq 9$ pour k compris entre 0 et n, on a en posant $r_k = 0$ pour $n+1 \leq k \leq m-1$:

$$x = q + \frac{r}{10^m} = q + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{r_k}{10^{m-k}} = a_0, a_1 \cdots a_m$$

avec $a_0 = q$, $a_k = r_{m-k}$ pour k compris entre 1 et m.

La réciproque est évidente. ■

Définition 4.3 *On dit que le développement décimal illimité propre d'un réel x est périodique à partir d'un certain rang s'il existe un entier $p \geq 0$ tel que la suite $(a_n)_{n \geq p+1}$ soit périodique, ce qui signifie qu'il existe un entier $q \geq 1$ tel que :*

$$\forall n \geq p+1, \ a_{n+q} = a_n.$$

Un développement périodique à partir du rang $p+1$ est donc de la forme :

$$\begin{aligned} x &= a_0, a_1 \cdots a_p a_{p+1} \cdots a_{p+q} a_{p+1} \cdots a_{p+q} \cdots a_{p+1} \cdots a_{p+q} \cdots \\ &= a_0, a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q b_1 \cdots b_q \cdots b_1 \cdots b_q \cdots \end{aligned}$$

Théorème 4.8 *Un réel strictement positif x est rationnel si et seulement son développement décimal illimité propre est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Le réel $x > 0$ est rationnel si, et seulement si, $x - [x]$ est rationnel. On peut donc se limiter à $x \in]0, 1[$, ce qui nous ramène à $a_0 = 0$.

Si le développement décimal illimité propre de $x \in]0, 1[$ est périodique à partir d'un certain rang, on a alors :

$$x = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} + \frac{b_1}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{b_q}{10^{p+q}} + \frac{b_1}{10^{p+q+1}} + \cdots + \frac{b_q}{10^{p+2q}} + \cdots,$$

soit en notant $r = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} \in \mathbb{Q}$:

$$x = r + \frac{1}{10^p}\left(\frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q}\right) + \frac{1}{10^{p+q}}\left(\frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q}\right) + \cdots$$

et en notant $s = \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_q}{10^q} \in \mathbb{Q}$, on a :

$$x = r + \frac{s}{10^p}\left(1 + \frac{1}{10^q} + \frac{1}{10^{2q}} + \cdots\right) = r + \frac{10^q s}{10^p\,(10^q - 1)} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement supposons que $x = \frac{a}{b}$ avec $0 < a < b$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier k compris entre 0 et b, on a la division euclidienne $10^k a = bq_k + r_k$, les restes r_k étant compris entre 0 et $b-1$, ces restes forment donc une famille de $b+1$ entiers à valeurs dans un ensemble à b éléments, il y en a donc forcément deux qui sont égaux, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p < q$ compris entre 0 et b tels que $10^p a = bq_p + r$ et $10^q a = bq_q + r$ et b divise la différence $10^q a - 10^p a$. On a donc $\frac{10^q a}{b} - \frac{10^p a}{b} \in \mathbb{N}$ et les rationnels $\frac{10^q a}{b}$ et $\frac{10^p a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule (unicité du développement décimal illimité propre).

Si $\frac{a}{b} = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{10^p a}{b} &= m_0 + 0, a_{p+1} a_{p+2} \cdots a_{p+n} \cdots \\ \frac{10^q a}{b} &= m_1 + 0, a_{q+1} a_{q+2} \cdots a_{q+n} \cdots \end{aligned} \right.$$

avec m_0, m_1 entiers et il en résulte que $a_{p+n} = a_{q+n}$ pour tout $n \geq 1$, soit :

$$\frac{a}{b} = 0, a_1 \cdots a_p a_{p+1} \cdots a_q a_{p+1} \cdots a_q \cdots a_{p+1} \cdots a_q \cdots$$

c'est-à-dire que le développement est périodique à partir du rang $p+1$. ∎

Exercice 4.9 *Montrer que le réel* $x = 0,0100100010\cdots$, *où le nombre de 0 qui suivent le chiffre* $a_k = 1$ *est augmenté de 1 à chaque étape, est irrationnel.*

Solution 4.9 *On a* $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{p_k}}$ *avec* $p_0 = 2$ *et pour* $k \geq 1$, $p_k = p_{k-1} + k + 2$, *soit :*

$$p_k = p_0 + 1 + 2 + \cdots + k + 2k = \frac{k(k+1)}{2} + 2(k+1) = \frac{(k+1)(k+4)}{2}.$$

Si x *est rationnel, alors son développement décimal est de la forme :*

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q b_1 \cdots b_q \cdots b_1 \cdots b_q \cdots$$

avec l'un des $b_j = 1$ *pour* j *compris entre* 1 *et* q *et à partir du rang* $p+1$ *l'écart entre deux* 1 *consécutifs serait majoré, ce qui contredit* $p_k - p_{k-1} = k + 2$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.